Title	GI/GI/1/kの不変式とその近似式への応用(待ち行列理論とその周辺)
Author(s)	宮沢, 政清
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 564: 197-209
Issue Date	1985-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/99078
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
564巻 1985年 197-209

GI/GI/1/kの不変式とその近似式への応用

東京理科大・理工　宮沢政清 (Masakiyo Miyazawa)

1. 概要

本論では、典型的待ち行列モデルの1つであるGI/GI/1/kについて論じる。ここに、GI/GI/1/kとは、待つことのできる人数がk人に制限されたGI/GI/1型待ち行列モデルである。なお、サービスの規律は、先着順を仮定する。この型の待ち行列モデルはすでにやりつくされているという感もある。しかし、これまでの方法は、厳密解をもとめる方向が主であって近似解については、まだやり残されていることが多いと思われる。

そこで、本論では、GI/GI/1/kの定常状態における待ち時間分布について近似式を作ることを考える。一般に、近似式というのは、それがどんな過程から作られたかということは余り問題にされず、数値的検討が重要視される傾向がある。そのため、かなり職人芸的分野となりがちである。しかし、理論的発展性を考えるならば、近似式に対して理論的扱いをす

ることがもっと必要であると思う。本論では、近似式が、どんな仮定のもとでどのように作られるかを詳しく論じる。ここでもちいた方法は、著者が文献[3]でM/GI/sモデルについておこなったものを拡張したものである。方法論的には次の3段階よりなる。

① 任意時点、客の到着及び退去時点における各種の特性量間の関係式（これを、不変式という）を求める

② ①の関係式（不変式）を、目的の変量（ここでは、待ち時間）について、不完全でもよいから解き出す。

③ ②で解き出された式で、未知な部分を、適当な仮定を加えて決定する。

①と②の結果は、厳密に成り立つ。

なお、今回の報告では、数値的検討を余りしていない。数値的考察は今後の課題としたい。

2. 不変式の導びき方

不変式とは、一種の定常状態での平衡方程式である。それが、通常の平衡方程式とは異なるのは、任意時点と各種の状態変化の起った時点における各種の量の分布間の関係である点である。不変式については、一般的方法論があり、それについては文献[4]等を参照してほしい。ここでは、記法等の基

本的事項の説明のみをおこなう。

$\{X(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ を右微分可能な標本関数をもつ定常な確率過程とする。また，$\{N(\cdot)\}$ を $\{X(t)\}$ のすべての不連続点を含む点程で，$\{N(\cdot)\}$ と $\{X(t)\}$ は同時に定常であるとする。

$$(1) \qquad \lambda = E\{N((0,1])\}$$

とおき，$\lambda < +\infty$ を仮定する。さらに，$\{N(\cdot)\}$ は単純である，すなわち，1つの時刻に，2つ以上の点が重なることはないと仮定する。このとき，$\{N(\cdot)\}$ の点が時刻 0 にあるという条件でのもとでの条件付確率分布が次のように定義される。

$$(2) \qquad P_0(A) = \lambda^{-1} E\left(\int_0^1 I_{\{T_s A\}} N(ds)\right) \qquad (^\forall A \in \mathcal{F})$$

ここに，$\mathcal{F}$ は，$N(\cdot)$ 及び $X(t)$ に関する事象の集合であり，T_s は，A を時間 s だけずらせた事象である。また，(1)と(2)の E は，期待値を表し，I_A は事象 A の指示関数である。

このとき次の補題が成り立つ。

補題1 (Miyazawa[4]) $E|X'(0)|$ と $E_0|X(0-)-X(0+)|$ が有限ならば，

$$(3) \qquad E(X'(0)) = \lambda E_0(X(0-)-X(0+))$$

ここに，E_0 は，P_0 に関する期待値を表す。また，微分はすべて右微分であるとする。

待ち行列モデルでは、点過程 N として，客の到着や退去の時点を考える。このとき，到着と退去を個別に扱った方がわかりやすい。このようなとき，Nをいくつかの点過程に分割するとよい。$N_1,\cdots,N_n$を点過程とし，

$$N(B)=N_1(B)+\cdots+N_n(B) \qquad (\forall B\in R\text{上のボレル集合})$$

とする。$X,N_1,\cdots,N_n$は、同時に定常であるとしよう。このとき，式(2)と同様な条件付確率分布 $P_1,\cdots,P_N$が、$N_1,\cdots N_n$ に対して定義できる。$\lambda_i=EN_i((0,1])$とおけば，(3)は，

$$(4) \qquad E(X'(0))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i E_i(X(0-)+X(0+))$$

と変形される。

GI/GI/1/R に対して，(4)を適用する。はじめにモデルを記述するための記号について説明する。系へ到着する客に対して、到着順に番号をつける。ただし、時刻0より後に来た最初の客の番号を1，それ以前の客は，0,-1,-2,$\cdots$ と番号づけする。T_nで，n番目の客と$n+1$番目の客の到着間隔，S_nでn番目の客のサービス時間を表わす。$\{T_n\},\{S_n\}$ は，0番目の客が時刻0に到着したという条件のもとで互いに独立で同一分布に従うと仮定する。この待ち行列に定常状態が存在すると仮定し，その状態において、時刻tに対し次の量を定

義する。

$u(t)$ ……次の客がくるまでの時間

$r(t)$ ……現在サービス中の客がサービスを終了するまでに必要な時間

$l(t)$ ……系内人数（$q(t)$…待ち人数）

$v(t)$ ……仮り待ち時間

$W_n = v(t_n -)$：n 番目の客の待ち時間
（ここに、t_n は、n 番目の客の到着時間とする）

N_0 ＝客の到着時点よりなる点過程

N_1 ＝客の退去時点よりなる点過程

P_0, P_1 を N_0, N_1 に関する (2)で定義される確率分布とする。このとき，$\{W_n\}$ は，P_0 に関して定常となっている。$u(t)$, $r(t)$ $l(t)$, $v(t)$ 等は，もとの確率分布に関して定常である。(4)を適用するために，$X(t) = X_j(t)$ を次のように選ぶ。

$$
(5)\quad \begin{cases} X_0(t) = I_{\{l(t)=0\}} \exp(-\xi u(t)) \\ X_j(t) = I_{\{l(t)=j\}} \exp(-\xi u(t) - \theta r(t)) \qquad (j=1,2,\cdots,k+1) \end{cases}
$$

ここに，ξ, θ は非負の数である。このとき，明らかに補題1の条件は満されるので，(4)が適用できる。

この結果を表すために，以下の記号を定義する。

$p_n = P(l=n)$, $p_n^0 = P_0(l^- = n)$, $p_n^* = P_1(l^+ = n)$
$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

$$F(\xi) = E(e^{-\xi T}) \qquad G(\theta) = E(e^{-\theta S})$$

$$F_e(\xi) = \frac{1-F(\xi)}{\xi ET} \qquad G_e(\theta) = \frac{1-G(\theta)}{\theta ES}$$

$$\phi_j(\xi,\theta) = E(e^{-\xi u-\theta r} \mid l = j) \qquad (j=1,2,\cdots)$$

$$\phi_j^{\circ}(\xi,\theta) = E_0(e^{-\xi u-\theta r} \mid r^- > 0,\ l^- = j)$$

$$\phi_j^{*}(\xi,\theta) = E_1(e^{-\xi u-\theta r} \mid r^- > 0,\ l^+ = j)$$

ここに、$l=l(0)$，$l^{\pm}=l(0\pm)$，$u=u(0)$，$r=r(0)$，$r^-=r(0-)$ とする。このとき，$j=1,2,\cdots,k$ に対して，

$$(6)\ \begin{cases} EX_j'(0) = (\xi+\theta)\phi_j(\theta,\xi)p_j \\ E_0X_j(0-) = \phi_j^{\circ}(0,\theta)p_j^{\circ} \\ E_0X_j(0+) = F(\xi)(G(\theta)I_{\{j=1\}} + \phi_{j-1}^{\circ}(0,\xi)I_{\{j\geq 2\}})p_{j-1}^{\circ} \\ E_1X_j(0-) = \phi_{j-1}^{*}(\xi,0)p_{j-1}^{*} \\ E_1X_j(0+) = G(\theta)\phi_j^{*}(\xi,0)p_{j-1}^{*} \end{cases}$$

が成り立つ。また、$j=k+1$ に対しては、(6)のうち、$E_1X_j(0+)$ を次のように変更すればよい。

$$E_1(X_j(0+)) = F(\xi)\phi_j^{*}(0,\theta)p_j^{*}$$

$j=k+1$ においては、到着した客はすぐ退去するとみなされるので、この関係が成り立つ。なお、$\phi_{k+1}^{\circ}(0,\theta) = \phi_{k+1}^{*}(0,\theta)$

であることも注意しておこう。最後に $j=0$ の場合をあげておく。

$$
(7)\quad \begin{cases} EX_j'(0) = \xi\phi_j(\xi,0)p_j \\ E_0X_j(0-) = p_j^\circ \\ E_0X_j(0+) = E_1X_j(0-) = 0 \\ E_1X_j(0+) = \phi_j^*(\xi,0)p_j^* \end{cases}
$$

$p_j^\circ = p_j^*\ (j \geqq 0)$ であるから、(4), (6), (7) より次の定理が得られる。

定理 2.1　GI/GI/1/K において次の式が成り立つ。

$$
(8)\quad \xi\phi_0(\xi,0)p_0 = \lambda(1-\phi_0^*(\xi,0))p_0^\circ
$$

$$
(9)\quad (\xi+\theta)\phi_j(\xi,\theta)p_j
$$

$$
= \lambda\{\phi_{j-1}^*(\xi,0) - F(\xi)(G(\theta)I_{\{j=1\}} + \phi_{j-1}^\circ(0,\theta)I_{\{j\geqq 2\}})\}p_{j-1}^\circ
$$

$$
+\lambda\{\phi_j^\circ(0,\theta) - G(\theta)\phi_j^*(\xi,0)\}p_j^\circ
$$

$$
(j=1,2,\cdots,K)
$$

$$
(10)\quad (\xi+\theta)\phi_{K+1}(\xi,\theta)p_{K+1}
$$

$$
= \lambda\{\phi_K^*(\xi,0) - F(\xi)\phi_K(0,\theta)\}p_K^\circ
$$

$$
+\lambda(1-F(\xi))\phi_{K+1}^\circ(0,\theta)p_{K+1}^\circ
$$

この定理は、定常方程式をラプラス変換をもちいて表現したものである。ここで、

$$\psi(\xi,\theta,x)=\sum_{j=1}^{k+1}\phi_j(\xi,\theta)x^{j-1}p_j$$
$$\psi^{\circ}(\xi,\theta,x)=\sum_{j=1}^{k}\phi_j^{\circ}(\xi,\theta)x^{j-1}p_j^{\circ}$$
$$\psi^{*}(\xi,\theta,x)=\sum_{j=1}^{k}\phi_j^{*}(\xi,\theta)x^{j-1}p_j^{*}$$

とおく。このとき，定理 2.1 は、次のように、(8)を除いて、1つの式に表すことができる。

系 2.1

(11) $(\xi+\theta)\psi(\xi,\theta,x)$

$$=\lambda\{(\phi_0^{*}(\xi,0)-F(\xi)G(\theta))p_0^{\circ}$$
$$+(x-G(\theta))\psi^{*}(\xi,0,x)+(1-xF(\xi))\psi^{\circ}(0,\theta,x)$$
$$+(1-F(\xi))\phi_{k+1}^{\circ}(0,\theta)x^{k}p_{k+1}^{\circ}\}$$

証明） (9)$\times x^{j-1}$ を j について加え，さらに，(10)$\times x^{k}$ を加えれば (11)が得られる。

$\psi^{\circ}(0,\theta,G(\theta))$ は、$\ell^{-}>0$ という条件のもとでの待ち時間のラプラス変換であるから、待ち時間のラプラス変換を $W(\theta)$ とすると，

$$(12) \qquad W(\theta) = \frac{1}{1-p^{\circ}_{k+1}}\left(p^{\circ}_{0} + \psi^{\circ}(0,\theta,G(\theta))\right)$$

と表わせる。ここに，$W(\theta)$は、サービスを受けることのできなかった客を除いている。さて，(11)は、$x=G(\theta)$, $\eta=-\theta$ とおくことにより，$\psi^{\circ}(0,\theta,G(\theta))$ について解き出せる。したがって，(8)より次の定理が得られる。

定理2.2　GI/GI/1/k において，サービスを受けることのできた客の待ち時間のラプラス変換を$W(\theta)$とすれば，

$$(13) \qquad W(\theta) = \frac{-\theta\phi_0(-\theta,0)p_0 + \lambda(F(-\theta)-1)\phi^{\circ}_{k+1}(0,\theta)G^{k}(\theta)p^{\circ}_{k+1}}{\lambda(1-G(\theta)F(-\theta))(1-p^{\circ}_{k+1})}$$

が得られる。

(13)は、GI/GI/1 に対する Marshall [1] の一般化 Pollaczek-Khinchin の公式の GI/GI/1/k への拡張である。(13)には，未決定の項が4つ含まれている。すなわち，p_0, p°_{k+1}, $\phi_0(-\theta,0)$ 及び $\phi^{\circ}_{k+1}(0,\theta)$ である。これらのうち，p_0 と p°_{k+1} は、後の2つから次の2式をもちいて定めることができる。

$$(14) \qquad p_0 = (1-\rho) + \rho p^{\circ}_{k+1}$$

$$(15) \qquad -\eta\phi^{\circ}_{0}(-\eta,0)\,p_0 = \lambda(1-F(-\eta))\phi^{\circ}_{k+1}(0,\eta)G^{k}(\eta)p^{\circ}_{k+1}$$

ここに、ηは、$1-G(\theta)F(-\theta)=0$ の $\theta\neq 0$ における根である。
(14)は、$W(0)=1$ より、(15)は、$W(\theta)$の分母$=0$ で分子$=0$でなければならないことより得られる。

最後に仮り待ち時間と待ち時間の関係についてのべておく。

定理 2.3 GI/GI/1/k において、仮り待ち時間Vのラプラス変換を$V(\theta)$とするならば、

$$(16)\quad \theta V(\theta)=\theta(1-\rho)+(1-p^{0}_{k+1})W(\theta)(1-G(\theta))$$

が成り立つ。

証明）(11)で、$\xi=0$, $x=G(\theta)$とおけば、(16)が得られる。

この定理より、$V(\theta)$が、$W(\theta)$より求まることがわかる。

3. 近似式

$W(\theta)$の近似式を作ることを考えよう。前節の結果によれば、このためには、$\phi_0(-\theta,0)$と$\phi^{0}_{k+1}(0,\theta)$を適当に推定すればよい。これからは、近似値には、(app)を付けて表す。

(i) $\phi_0(\xi,0)(app)=F_e(\xi)$

(ii) $\phi^{0}_{k+1}(0,\theta)(app)=G_e(\theta)$

と近似しよう。これは、M/M/1/K で厳密に成り立つ。(14), (15) より

$$(17)\quad p_0(app) = \frac{1-\rho}{1-\dfrac{\rho\eta E(S)\,G^{-K}(\eta)}{1-G(\eta)}}$$

$$(18)\quad p^{\circ}_{K+1}(app) = \frac{\eta E(S)}{1-G(\eta)}\,G^{-K}(\eta)\,p_0(app)$$

となる。また、(11) より、

$$(19)\quad W(\theta)(app) = \frac{(1-F(-\theta))[p_0(app)-G_e(\theta)G^{K}(\theta)\,p^{\circ}_{K+1}(app)]}{(1-G(\theta)F(-\theta))(1-p^{\circ}_{K+1}(app))}$$

が得られる。

つぎに、(19) より得られる平均待ち時間の近似式をあげておく。

$$(20)\quad EW(app) = \frac{\lambda^2E(T^2)(1-p_0(app))+(\lambda^2E(S^2)-2\rho)(1-p^{\circ}_{K+1}(app))-2\lambda\left(\dfrac{E(S^2)}{2ES}+KE(S)\right)p^{\circ}_{K+1}(app)}{2\lambda(1-\rho)(1-p^{\circ}_{K+1}(app))}$$

$K=+\infty$ のときには、(20) はよく知られた近似式の1つに一致する。(20) は、M/M/1/K 及び M/GI/1/$+\infty$ で厳密に成り立っている。

(19) の近似式を得るために仮定 (i), (ii) をもちいた。p_0, p°_{K+1} に対してより適切な近似が得られるならば、(19) の改善が可能となる。

最後に、平均系内人数 EL の近似式と数値例をあげておく。

$$EL(app) = \lambda(1 - p^0_{k+1}(app))EW(app) + (1 - p_0(app))$$

以下の数値は、$E_3/E_3/1/4$ の場合に Ohsone [5] の厳密解と比較したものである。ただし，$\lambda = (ET)^{-1}$，$\mu = (ES)^{-1}$ とする。

μ	0.1	0.5	1.0	2.0	
p_0	0.0000	0.0001	0.0711	0.5000	(exact)
	0.0000	0.00004	0.0650	0.5000	(app)
p_5	0.9332	0.6263	0.1184	0.0002	(exact)
	0.9000	0.5000	0.0651	0.00003	(app)
EW	—	—	—	—	
	39.629	7.334	1.835	−0.0001	(app)
EL	4.9330	4.5619	2.6509	0.6048	(exact)
	4.9629	4.6668	2.6523	0.4997	(app)

表１、 $E_3/E_3/1/4$ （$\lambda = 1.0$）

この数値結果だけからは余りよくわからないが，$p^0_{k+1}(app)$ の値を改善する必要があるように思われる。

References

[1] K.T. Marshall, "Some relationships between the distributions of waiting time, idle time, and interoutput time in GI/GI/1 queue, SIAM Journal Applied Math., 16, 324-327 (1968).

[2] M. Miyazawa, A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications, J. Appl. Prob. 16, 332-346 (1979).

[3] M. Miyazawa, Approximations of the queue length distributions by the basic equations I: Case of M/GI/s queues, Res. Rep. of Science University of Tokyo, ISSUT/0-84-2 (1984).

[4] M. Miyazawa, The intensity conservation law for queues with randomly changed service rate, J. Appl. Prob. 22 (1985) (to appear)

[5] T. Ohsone, The GI/E_k/1 queue with finite waiting room, JORSJ 24 375-391(1981)